

מכינת קדם הנדסה מכניקה

פרק 4 - וקטורים

תוכן העניינים

1. הגדרות סימונים והצגות..... 1
2. פעולות בין וקטורים..... 5
3. מכפלה סקלרית..... 8
4. וקטור יחידה..... 11
5. מכפלה וקטורית בדו-מימד..... 12
6. וקטור בשלושה מימדים..... (ללא ספר) 13
7. מכפלה וקטורית בשלושה מימדים..... 13
8. חיבור וחיסור וקטורים בשיטת המקבילית..... 14
9. תרגילים נוספים..... 16

הגדרות סימונים והצגות:

שאלות:

(1) הצגה פולרית

צייר את הוקטורים הבאים על גבי מערכת צירים:

שם הוקטור	גודל הוקטור	זווית הוקטור עם ציר ה- x
$\vec{A}$	$ \vec{A} = 2$	$\theta_A = 30^\circ$
$\vec{B}$	$ \vec{B} = 4$	$\theta_B = 30^\circ$
$\vec{C}$	$ \vec{C} = 2$	$\theta_C = 90^\circ$
$\vec{D}$	$ \vec{D} = 4$	$\theta_D = 120^\circ$
$\vec{E}$	$ \vec{E} = 2$	$\theta_E = 300^\circ$
$\vec{F}$	$ \vec{F} = 2$	$\theta_F = -60^\circ$

(2) הצגה קרטזית

צייר על מערכת צירים את הוקטורים הבאים, רשום את רכיבי הוקטורים וציין באיזה רביע נמצא כל וקטור:

$$\vec{A} = (1, 2), \vec{B} = (-2, 3), \vec{C} = (-3, -2), \vec{D} = (2, -1)$$

(3) מעבר מפולרי לקרטזי

הגודל של כל אחד מהוקטורים הבאים הוא 2.

רשום כל אחד מהוקטורים בהצגה הקרטזית שלו (פרק את הוקטורים הבאים לרכיבים):

א.

ב.

ג.

ד.



(4) דרך שנייה לפירוק לרכיבים

הגודל של כל אחד מהוקטורים הבאים הוא 3.
רשום כל אחד מהוקטורים הצגה הקרטזית שלו (פרק את הוקטורים הבאים לרכיבים):

**(5) פירוק לרכיבים**

באיור הבא, גודלו של הוקטור $\vec{A}$ הוא 4, וגודלו של הוקטור $\vec{B}$ הוא 5.
מצא את הרכיבים הקרטזיים של כל וקטור:



פתור פעם אחת באמצעות הזוויות שנתונות באיור, ופעם אחת באמצעות הזווית עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

(6) מקרטזי לפולרי

מצא את הגודל והכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A} = (2, -1)$

ב. $\vec{B} = (-0.5, -2)$

(7) מקרטזי לפולרי

שרטט את הוקטורים הבאים על מערכת צירים.
מצא את הגודל והכיוון של כל אחד מהוקטורים.
את הכיוון תאר ע"י הזווית של הוקטור עם ציר ה- x החיובי.

א. $\vec{A} = (2, 3)$

ב. $\vec{B} = (-1, 2)$

ג. $\vec{C} = (0, -3)$

ד. $\vec{D} = (2, -2)$

ה. $E_x = 2$, $|\vec{E}| = 3$ הוקטור ברביע הראשון.

ו. $E_y = -1$, $|\vec{E}| = 3$ הוקטור ברביע השלישי.

תשובות סופיות:

(1) ראו שרטוט:



(2) ראו שרטוט:



$$\vec{A} = (1.88, 0.68), \vec{B} = (1, \sqrt{3}), \vec{C} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), \vec{D} = (1, -\sqrt{3}) \quad (3)$$

$$\vec{C} = (-2.30, -1.93) \quad \text{ג.} \quad \vec{B} = (-2.30, 1.93) \quad \text{ב.} \quad \vec{A} = \left(\frac{3}{2}, 2.60\right) \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$\vec{D} = (-2.30, -1.93) \quad \text{ד.}$$

$$\vec{B} = (-4.33, -2.5) \quad \text{ב.} \quad \vec{A} = (-3.28, 2.29) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\theta_B = 255.96^\circ; |\vec{B}| = 2.06 \quad \text{ב.} \quad \theta_A = -26.57 = 333.43^\circ; |\vec{A}| = \sqrt{5} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\theta_A = 56.31^\circ; |\vec{A}| = \sqrt{13}$$



(7) א. שרטוט:

$$\theta_B = 116.57^\circ; |\vec{B}| = \sqrt{5}$$



ב. שרטוט:

$$\theta_C = 270^\circ ; |\vec{C}| = 3$$



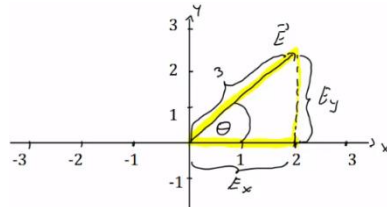
ג. שרטוט:

$$\theta_D = 315^\circ = -45^\circ ; |\vec{D}| = \sqrt{8}$$



ד. שרטוט:

$$\theta_E = 48.19^\circ ;$$



ה. שרטוט:

$$\theta_E = 199.47^\circ ;$$



ו. שרטוט:

פעולות בין וקטורים:

שאלות:

(1) חיבור וקטורים לפי סימונים

מצא את: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} = \vec{E}$.



(2) דוגמה 1

נתונים הוקטורים הבאים:

$$|\vec{A}| = 3, \theta_A = 30^\circ$$

$$|\vec{B}| = 2, \theta_B = -30^\circ$$

$$|\vec{C}| = 3, \theta_C = 180^\circ$$

א. שרטט את הווקטורים על גבי מערכת צירים.

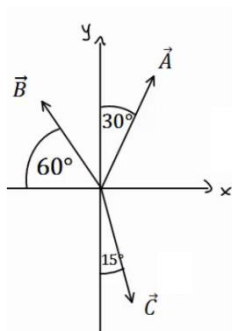
ב. שרטט את גודלן וכיוונן של הווקטור: $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

שרטט את הווקטור $\vec{D}$ על אותה מערכת צירים.

(3) דוגמה 2

הגודל של הוקטורים באיור הבא הוא: $|\vec{A}| = 5, |\vec{B}| = 4, |\vec{C}| = 5$.

מצא את הוקטור השקול (סכום הוקטורים): $\vec{D} = \vec{C} + \vec{A} + \vec{B}$.



(4) חיסור לפי סימונים

בציור נתונים הוקטורים: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

מצא את: $\vec{D} = \vec{B} - \vec{C} - \vec{A}$.



(5) דוגמה 1

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (3, 5), \vec{B} = (-1, 4), \vec{C} = (0, 2)$

מצא את :

א. $\vec{D} = -2\vec{B}$

ב. $\vec{E} = 3\vec{A} - 2\vec{C} - \vec{B}$

ג. $\vec{F} = -2(\vec{A} + \vec{B}) + 3\vec{C}$

(6) דוגמה 2

גודלם של הווקטורים באיור הבא הם : $|\vec{A}| = 5, |\vec{B}| = 4, |\vec{C}| = 3$



א. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{D} = -2\vec{B}$

שרטט את $\vec{D}$ על מערכת צירים.

ב. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{E} = 2\vec{A} - 3\vec{B} - 4\vec{C}$

שרטט את $\vec{E}$ על מערכת הצירים.

(7) דוגמה 3

גודלו של הווקטור $\vec{A}$ הוא 2 והזווית שהוא יוצר עם ציר ה- x החיובי היא 30° .

א. שרטט את הווקטור במערכת הצירים.

ב. מצא את $\vec{B} = 3 \cdot \vec{A}$ ללא פירוק של $\vec{A}$ לרכיבים. שרטט את $\vec{B}$ על אותה מערכת.

ג. מצא את הרכיבים של $\vec{A}$.

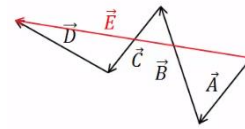
ד. חשב שוב את $\vec{B} = 3 \cdot \vec{A}$. הפעם דרך הרכיבים של $\vec{A}$.

ה. מצא את גודלו וכיוונו של $\vec{B}$ מהרכיבים שמצאת בסעיף ד'.

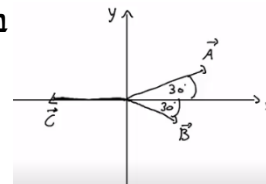
הראה כי התוצאה זהה לסעיף ב'.

תשובות סופיות:

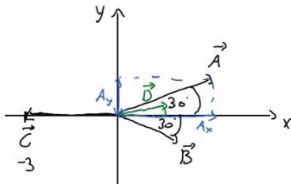
(1)



(2) א.

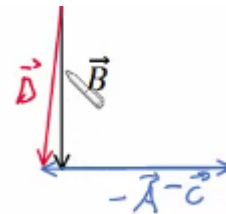


ב. $|\vec{D}| = 1.42, \theta_D = 20.60^\circ$



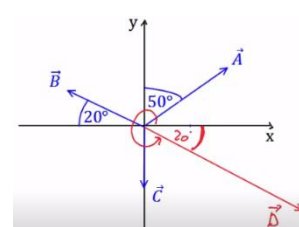
(3) $|\vec{D}| = 3.46, \theta_D = 58.84^\circ$

(4)

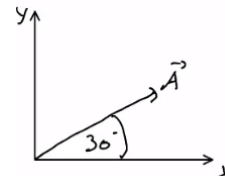
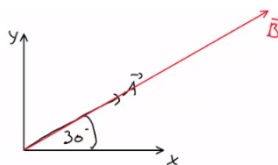


(5) א. $\vec{D} = (2, -8)$ ב. $\vec{E} = (10, 7)$ ג. $\vec{F} = (-4, -12)$

(6) א. $|\vec{D}| = 8, \theta_D = -20^\circ$ ב. $|\vec{E}| = 23.75, \theta_E = 37.23^\circ$



(7) א. ב. $|\vec{B}| = 6, \theta_B = \theta_A = 30^\circ$ ג. $\vec{A} = (\sqrt{3}, 1)$



ד. $\vec{B} = (3\sqrt{3}, 3)$ ה. ראה סרטון.

מכפלה סקלרית:

שאלות:

(1) דוגמה 1

מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית בין הוקטורים הנתונים בכל המקרים הבאים:

א. $\vec{A} = (-1, 2)$, $\vec{B} = (2, 2)$

ב.



(2) דוגמה 2

בדוק עבור זוגות הוקטורים הבאים האם הם מאונכים:

א. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (-2, 5)$

ב. $\vec{A} = (1, 4)$, $\vec{B} = (8, -2)$

ג. $\vec{A} = (-1, -2)$, $\vec{B} = (-2, 1)$

ד. שרטט כל זוג וקטורים מאונכים על מערכת צירים.
חשב את זוויות הוקטורים עם הצירים והראה שהזווית בין הוקטורים היא אכן 90 מעלות.

(3) דוגמה 3

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$

- מצא את תוצאת המכפלה הסקלרית באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
- מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.
- מצא את המכפלה הסקלרית שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בקוסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

דוגמה 4 (4)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-3, 1)$, $\vec{B} = (2, -4)$

א. הראה כי החישוב של $\vec{A} \cdot \vec{B}$ זהה לחישוב $\vec{B} \cdot \vec{A}$.

ב. הוכח בצורה כללית כי המכפלה הסקלרית היא פעולה קומוטטיבית (הדרכה : רשום את הוקטורים בצורה כללית עם נעלמים).

דוגמה 5 (5)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (2, 1)$, $\vec{B} = (-3, 2)$, $\vec{C} = (1, -3)$

חשב את :

א. $\vec{A} \cdot \vec{C}$

ב. $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ג. $\vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$

ד. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$

ה. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

ו. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}$

ז. $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$

דוגמה 6 (6)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$

חשב את :

א. $\frac{(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{|\vec{B}|^2}$

ב. $\frac{(\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{C}}{|\vec{C}|^2}$

דוגמה 7 (7)

נתונים הוקטורים הבאים : $\vec{A} = (-2, 2)$, $\vec{B} = (1, -3)$, $\vec{C} = (1, 5)$

מצא את הזווית בין $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$ ובין $\vec{B}$ ל- $\vec{C}$.

תשובות סופיות:

(1) א. 2 ב. -5.13

(2) א. $\vec{A}$ לא מאונך ל- $\vec{B}$. ב. מאונכים. ג. מאונכים.

ד. ב. $\theta_A = 75.96^\circ, \theta_B = 14.04^\circ$. ד. ג. $\theta_A = 26.57^\circ, \theta_B = 26.57^\circ$.



(3) א. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$ ב. $|\vec{A}| = \sqrt{10}, \tilde{\theta}_A = 161.57^\circ, |\vec{B}| = \sqrt{20}, \tilde{\theta}_B = -63.43^\circ$

ג. $\vec{A} \cdot \vec{B} = -10$

(4) א. הוכחה. ב. הוכחה.

(5) א. -1 ב. -10 ג. -10 ד. (-4,12) ה. (-18,-9)

ו. (12,-8) ז. 36

(6) א. (-0.8,2.4) ב. (-0.54,-2.69)

(7) $\alpha_{\vec{AB}} = 153.43^\circ, \alpha_{\vec{BC}} = 150.26^\circ$

וקטור יחידה:

שאלות:

1) דוגמה וקטור יחידה

מצא וקטורי יחידה בכיוון של הוקטורים הבאים:

א. $\vec{A} = (-2, -3)$

ב. $\vec{B} = (3, 4)$

תשובות סופיות:

1) א. $(-0.55, -0.83)$ ב. $(0.6, 0.8)$

מכפלה וקטורית בדו-מימד:

שאלות:

(1) דוגמה – מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים הבאים: $\vec{A} = (-4, 1)$, $\vec{B} = (2, -3)$.

א. חשב את: $\vec{A} \times \vec{B}$ באמצעות ההצגות הקרטזיות הנתונות.
מהו גודל המכפלה?

ב. מצא את הגודל והזווית של כל וקטור.

ג. חשב את: $|\vec{A} \times \vec{B}|$ שוב, הפעם באמצעות הנוסחה של מכפלת הגדלים בסינוס הזווית. בדוק כי התוצאה זהה לסעיף א'.

תשובות סופיות:

(1) א. 10 ב. $|\vec{B}| = \sqrt{13}$, $\theta_B = -56.31^\circ$, $|\vec{A}| = \sqrt{17}$, $\theta_A = 165.96^\circ$ ג. 10

מכפלה וקטורית בשלושה מימדים:

שאלות:

(1) מכפלה וקטורית

נתונים הוקטורים: $\vec{A}(1,2)$, $\vec{B}(1,-3)$, $\vec{C}(-1,2,-2)$, $\vec{D}(2,0,1)$.

א. מצא את: $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

ב. מצא את: $\vec{A} \times \vec{B}$.

ג. מצא את: $\vec{C} \times \vec{D}$.

תשובות סופיות:

(1) א. -5 ב. $\hat{z}(-5)$ ג. $\vec{C} \times \vec{D} = 2\hat{x} - 3\hat{y} - 4\hat{z}$

חיבור וחיסור וקטורים בשיטת המקבילית:

שאלות:

(1) חיבור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$. גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$. גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$. שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את: $\vec{A} + \vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

(2) חיסור באמצעות מקבילית

נתונים הוקטורים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$. גודלו של A הוא 8 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_A = 130^\circ$. גודלו של הוקטור B הוא 4 והזווית שלו עם ציר ה- x החיובי היא: $\theta_B = 60^\circ$. שרטט את הוקטורים על מערכת צירים ומצא את: $\vec{A} - \vec{B}$ באמצעות שיטת המקבילית.

(3) מציאת אורך של שקול

אורכם של שני וקטורים הוא 5 ו-10 ס"מ. הזווית ביניהם היא 30 מעלות. מהו אורכו של הוקטור השקול שלהם (סכום הוקטורים)?

(4) מציאת זווית בין שני וקטורים

נתונים שני וקטורים שאורכם 10 ו-13 מטר. אורך השקול שלהם הוא 20 מטר. מצא את הזווית בין הווקטורים.

תשובות סופיות:

 (1) 108.1° , 10.1

 (2) 159.5° , 7.62

 (3) $a \approx 14.6 \text{ c.m}$

 (4) $\theta = 60^\circ$

תרגילים נוספים:

שאלות:

(1) נתונים הווקטורים הבאים: $\vec{A} = 5, 20^\circ$, $\vec{B} = 2, 150^\circ$, $\vec{D} = 10, 220^\circ$. מצאו את גודל וכיוון הווקטור $\vec{C}$ אם: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{D}$.

(2) באיור הבא נתונים שלושה וקטורים. מצאו את גודל הווקטור $\vec{A}$ ואת גודל הווקטור $\vec{B}$, אם נתון שגודל הווקטור $\vec{C}$ הוא 50 ו- $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.



תשובות סופיות:

(1) $\vec{C} = 14, 221^\circ$

(2) $|\vec{A}| \approx 55$, $|\vec{B}| \approx 53$